Said Bouzawit - lycée Abdelali Benchakroune

الدورة العادية 2004

التمرين الأول :

1) لدينا $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=x^2+(y-2)^2+(z+1)^2-3$

إذن $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ معادلة ديكارتية ل(S) فلكة مركزها $\Omega\ (0,2,-1)$ و شعاعها $r=\sqrt{3}$.

2) أ- $\Omega A=\sqrt{3} \Rightarrow A\in(S)$.

ب- $M(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$.

3) أ- $\vec{n}(1,1,1)$ منظمية على (Q) $\Leftarrow$ $(Q): x+y+z+d=0$ و $B\in(Q)$ $\Leftarrow$ $d=-2$.

ب- $d(\Omega,(Q))=\frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Leftarrow$ $d\prec r$ $\Leftarrow$ (Q) يقطع (S) وفق دائرة شعاعها $R=\sqrt{r^2-d^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و مركزها $H(a,b,c)$ المسقط العمودي ل Ω على (Q).

إذن : $\exists t\in IR / \begin{cases} a=t \\ b=2+t \\ c=-1+t \\ a+b+c-2=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $t=\frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ $H\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

التمرين الثاني :

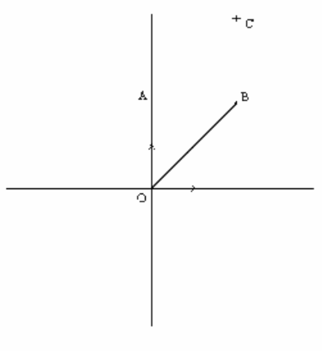
1) $\Delta=-16+16(1+i)=16i$ و $2i=(1+i)^2$ $\Leftarrow$ $\Delta=\left(2\sqrt{2}(1+i)\right)^2$.

$z'=2i-2\sqrt{2}(1+i)=-2\sqrt{2}+\left(2-2\sqrt{2}\right)$ و $z''=2i+2\sqrt{2}(1+i)=2\sqrt{2}+\left(2+2\sqrt{2}\right)$

$\mathrm{Re}(z'')\succ 0$ $\Leftarrow$ $z''=z_1$ و $z'=z_2$.

2) $a=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$ و $b=\left[2,\frac{\pi}{4}\right]$.

3) أ-



$aff(C)=aff(A)+aff(B)$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\frac{OA}{OB}=\frac{|a|}{|b|}=1$ $\Leftarrow$ $OA=OB$.

ب- $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ $\Leftarrow$ $OBCA$ متوازي الأضلاع

$OA=OB$ $\Leftarrow$ $OBCA$ معين. $\arg(z_1)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$.

$$\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)[2\pi] \Rightarrow \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)\equiv \arg(b)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi] .$$

التمرين الثالث :

1) $p(A)=\frac{C_2^1C_3^1C_4^1}{C_9^3}=\frac{2}{7}$ ، $p(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{6}$

$p(C)=1-p(\overline{C})$ ($\overline{C}$: "لا توجد أي بيدقة حمراء من بين البيدقات المسحوبة")

$$p(\overline{C})=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{5}{21} \Rightarrow p(C)=\frac{16}{21}$$

2) $A\cap B$: "$B_1R_1N_1$" $\Rightarrow p(A\cap B)=\frac{C_2^1C_1^1C_2^1}{C_9^3}=\frac{1}{21}$.

التمرين الرابع :

1) أ- $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x+1-1}{1+e^x}=1-\frac{1}{e^x+1}$ $\quad \forall x\in IR,$.

ب- IR متماثل بالنسبة للصفر

و $\forall x\in IR,\quad f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}=1+\frac{1}{2}x-2\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=-f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3) أ- $\forall x\in IR,\quad f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب- لكل x من IR^+ لدينا $f'(x)\prec 0 \Rightarrow$ f تناقصية قطعا على IR^+ ، إذن :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 --	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

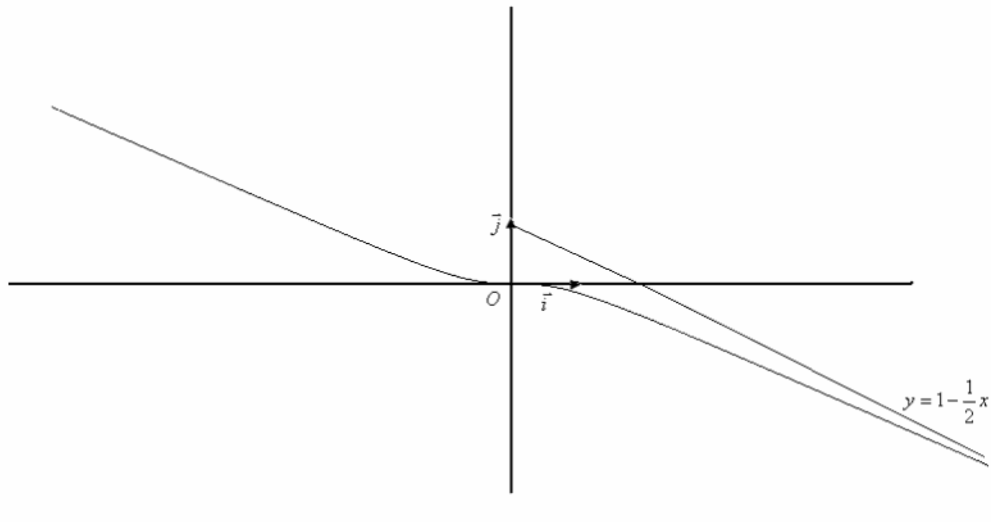
ج- f تناقصية قطعا على IR^+ ، إذن : $x\geq 0 \Rightarrow f(x)\leq f(0)$ يعني $1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\leq 0$

و منه $\forall x\in IR^+ \quad : 1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$.

(C) يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y=1-\frac{1}{2}x$

5) المنحنى



6) أ- $t=e^{-x} \Leftarrow dx=-\dfrac{dt}{t}$ إذن $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{x}}\,dx=\int_{e}^{1}\frac{t}{1+t}\left(-\frac{dt}{t}\right)=-\int_{e}^{1}\frac{1}{1+t}dt=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

ب- $\displaystyle A=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\left[x-\frac{1}{4}x^{2}\right]_{-1}^{0}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=\frac{5}{4}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)(um)$.

-II

1) من أجل $n=0$: $U_0=1\succ 0$.

نفترض أن $U_n\succ 0$ إذن $e^{U_n}+1\succ 2$ ومنه $\dfrac{2}{e^{U_n+1}}\prec 1$ أي $U_{n+1}=1-\dfrac{2}{e^{U_n+1}}\succ 0$.

إذن : $U_n\succ 0$ $\forall n\in IN$.

2) أ- لدينا $\forall x\in IR^{+} \quad :1-\dfrac{2}{e^{x}+1}\le\dfrac{1}{2}x$. نضع $x=U_n$ ($U_n\succ 0$) فنجد $1-\dfrac{2}{e^{U_n}+1}\le\dfrac{1}{2}U_n$

أي $U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}U_n$ لكل n من IN .

ب- لدينا $U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}U_n \Rightarrow U_{n+1}-U_n\le-\dfrac{1}{2}U_n\prec 0 \Rightarrow (U_n)$ متتالية تناقصية.

3) من أجل $n=0$: $U_0=1\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}=1$

نفترض أن $U_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ إذن $\dfrac{1}{2}U_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ ومنه $U_{n+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ (لأن $U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}U_n$).

إذن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من IN .

لدينا $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq U_n \succ 0$ و $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ $\Leftarrow$ $\lim U_n = 0$.